一次元ランダム系

新潟大・工　　合　田　正　毅

1. 序

ランダム系の研究は30年近く前の Dyson [1]の仕事により基礎が作られ始め，Dean [2]の振動数スペクトルの数値実験，Anderson [3] や Mott & Twose [4] による一電子波動函数の局在に関する推論により活気づいた。周期系の物理のクリアーな特徴に対し非周期系のそれはボケ，寿命等で軽度のものが記述されるダーティーなものであるとの漠然とした予想に反し，非周期系にはそれ自身に特徴的な姿がある事が浮かび上がって来たからである。振動数スペクトルの一見複雑な特徴は数年の間に松田[5]，堀[6] 等により，Saxon–Hutner 型定理の一般化という形で理解されるようになったが，固有函数の局在に関しては，点スペクトル[7]，指数函数的局在[8]，拡散不在等[3] のクリアーな概念が一次元で確立されるのに10～20年の才月を必要として来た。

非周期系の特徴と見なされるものにパーコレーション[9]と固有函数の局在がある。後者にスペクトルの性質も含ませると，非周期系の種々の性質はこれらの特徴と関連する。多体問題としてはスピングラス[10]に代表されるランダム系特有の〝相〃及び〝転移〃の問題があるが未だその本質は明確でない。一般に多体ランダム系の問題はこれから扱われるべきものの一つであり特徴的な事が出て来る事が期待されるが，多体系自体の扱いがむつかしいという事があって，問題をどのような形でとらえるかが具体的な課題となる。又今迄は空間的なランダムネスを持った系が主として扱われて来たが，時間的な変動をともなう系についての議論はこれからの関心事であるように思われる。これらの諸問題に関し一次元系は，トポロジー，パーコレーション，相転移等に関してはおもしろみに欠けるが，固有値の分布や固有函数の性質に関して大きな寄与をして来た。

2. 一次元系の固有函数の局在

時間に依存しない一次元系の一体問題に関しては次の型のランダム系に関し議論されている。

(a) 強結合型[11), 12)]

$$\alpha_n a_n = t_{n,n+1}\, a_{n+1} + t_{n,n-1}\, a_{n-1} \qquad (-\infty < n < \infty)$$

。フォノン

$$\alpha_n = (K_{n,n+1} + K_{n,n-1}) - M_n \omega^2, \quad t_{n,n\pm1} = K_{n,n\pm1} \qquad (M_n：質量,\ K_{n,n\pm1}：バネ定数)$$

◦ 強磁性マグノン

$$\alpha_n = E/S_n - 2(S_{n+1}/S_n \cdot J_{n,n+1} + S_{n-1}/S_n \cdot J_{n,n-1})$$

$$t_{n,n\pm1} = -2J_{n,n\pm1}$$

$\left(\begin{array}{l} S_n\text{：スピンの大きさ，}\ J_{n,n\pm1}\text{：変換相互作用} \\ a_n = \sqrt{S_n}\,\phi_n,\ \ \phi_n\text{：マグノンの振巾} \end{array}\right)$

◦ 強結合電子

$$\alpha_n = (E - \varepsilon_n)$$

（ε_n：アトミックエネルギー，$t_{n,n\pm1}$：トランスファーエネルギー）

◦ エキシトン

強結合電子系と同様

(β) クローニッヒ，ペニーモデル等[11)]

(γ) ランダムポテンシァル中の一体問題[7),8),13)]

$$H^{\omega}u(X) = -\Delta\cdot u(X) + q(X,\omega)\cdot u(X)$$

$-\infty < X < \infty$ ，　$\omega\in\Omega$

$q(X,\omega) = F(Q(X,\omega))$

$Q(X,\omega)$ は（Xを時間パラメーターとする）コンパクトリーマン多様体K上の定常ブラウン運動。FはK上の実数値函数で，ある $n_0 > 0$があり

$y\in K$　$^{\exists}k \leqq n_0$　$dF^k(y) \neq 0$ 。　又 $F(y)$は下に有界。

それぞれの型のランダム系について，次の結論が得られている。

(α), (β)

◦ $|G_{n,m}(\lambda - i0)| < O(\exp\{-\gamma(\lambda)|n-m|\})$　　$|n-m| \to \infty$

◦ 石井の弱拡散不在の成立

$a_n(0) = \delta_{n,N}$ の時全てのNにつき

$\int_0^{\infty} dt\, |a_N(t)|^2 = \infty$

◦ スペクトルは確率１で絶対連続でない。

(γ)

◦ スペクトルは確率１で点スペクトルである。

◦ 固有函数は指数函数的に局在している。

。アンダーソンの拡散不在の成立

$a_n(0)=\delta_{n,N}$ の時全てのNにつき

$\lim_{t\to\infty}|a_N(t)|>0$

(α)で簡単のために最近接相互作用のみを扱った事は本質的でないと思われている。又(γ)系は(α), (β)の多くの系の原形を与えるので(γ)についての結論は相当一般的なものである。

3. いかにして一次元ランダム系は伝導性を持ち得るか

2.に於て得られた結果より時間に依存しない線型な無限長一次元系の固有函数が局在している事はほとんど明らかとなった。しかもランダムネスが少しでもあると局在してしまうのが一次元系の特徴であり，従って現実に存在するこの種の充分長い一次元系は例外的なケースを除いて全て絶縁体であると言う事が結論される。一方近年疑一次元系が種々実験室で作られるようになり一次元伝導体の存在が話題を集めている[14]。この事は上記の結論とどの様にして融和し得るであろうか。当面の話題は，小さなランダムネスを持つ一次元系はいかにして伝導体，更には金属的な伝導体になり得るかとの疑問に関するものである。以下少し基本的なところからこの問題を考えてみる。有限な系に関しての少い可能性から話を始める。

i) 局在の長さが資料の長さに匹敵する巨視的な大きさになっている場合

(α)型電子系では理論的にはその可能性はあるが[15]，それに対応する現実の系を考える事はむつかしい。(β), (γ)ではランダムポテンシァルの値が有界であるとすると，その上界より充分大きい運動エネルギーを持った粒子は有限の長さの資料を（宇宙線が人体をつき抜けるように）突き抜けてしまうと思われる。フォノンの場合$\omega\to 0$の近くで局在の長さは巨視的になっているようである[11]。この事は（もし明確になれば）一次元弾性波の存在を保障するように思われる。以上時間に依存しない線型一次元系についての小さな可能性について述べたが，現実には他の要素を考える事が重要と思われる。

ii) 局在の長さが，巨視的ではないがかなり大きく，小さな residual interaction により，局在状態間に遷移確率が生まれている場合。

状態密度を一定とし局在の長さを変えていった時に，局在の長さが大きくなるとエネルギーが隣接した固有状態間に遷移が起こり易い事を図1に示した。この推測は一次元弾性波の存在がより広い振動数領域で存在している可能性を示唆する。

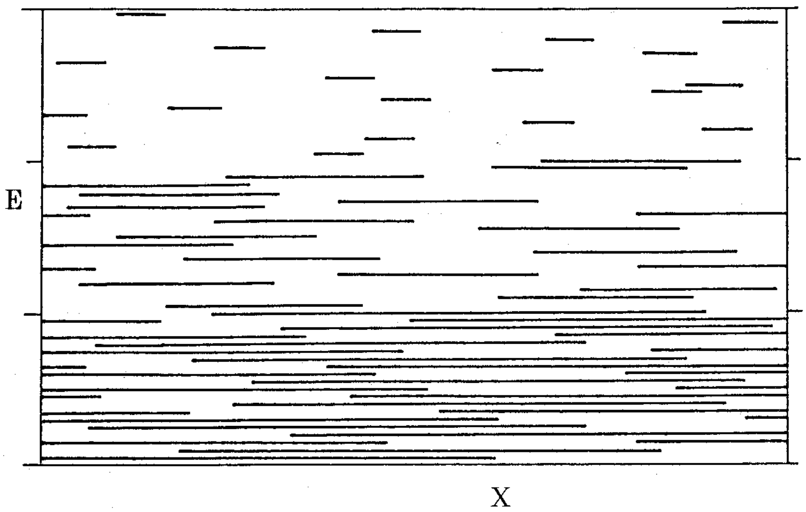

図1　固有函数の広がりとエネルギー隣接準位の重なりの様子の想像図。状態密度を一定にし３っつの異なる局在の長さについて，位置は適当にバラつかせた。

小さな residual interaction としては，非線型項，他自由度の効果，計算機誤差等種々の可能性があり直接疑問に答えた事にはなっていない。しかし伝導性に関して，ほとんど弾性的な散乱過程が問題となる此の場合を次の場合と区別しておく事は意味があろう。

iii) 他の自由度との相互作用による非弾性散乱過程が効いて来る場合

ii) iii) については，より具体的な立場から下記の様にも分類出来る。

a) ３次元性の効果[16]

b) 粒子間相互作用[17]

c) 格子等他自由度との非断熱的相互作用

α. 系が時間に依存する場合[18) 19)]

β. 電子－格子等の動的な結合が重要な場合[20)]

これらは，それぞれ重要な課題を今後に残している。

4. 一次元化

ＤＮＡや蛋白質の転移等を扱う場合に一次元系で使われた手法は有効である。更に，高次元系の問題を一次元化して見直す事により詳しい情報を得ようとする recursion 法が近年注目され始めている。[21)]此の方法は未だアイディアが先走っている感があり，方法自体についての地道な研究が必要と思われる。

参考文献

1) F. Dyson, Phys. Rev. **92** (1953), 1331.

2) P. Dean, Proc. Roy. Soc. **A25** (1960), 507.

3) P.W. Anderson, Phys. Rev. **109** (1958), 1492.

4) N.F. Mott and W.D. Twose, Adv. in Phys. **10** (1961), 107.

5) H. Matsuda, Prog. Theor. Phys. **31** (1964), 161.

6) J. Hori, Prog. Theor. Phys. **31** (1964), 522, 940.
J. Hori, *"Spectral Properties of Disordered Chains and Lattices"*, (Pergamon Press 1968).

7) I. Ya. Golidsheid, S.A. Molchanov and S.A. Pastur, Functional Analysis and Its Appl. **11** (1977), 1.

8) S.A. Molchanov, Izv. AHCCCP Ser. Mat. **42** (1978), 70.

9) 例えばV.K.S. Shante and S. Kirkpatric, Adv. in Phys. **20** (1971), 235.

10) 例えばS.F. Edwards and P.W. Anderson, J. Phys. **F5** (1975), 965.

11) H. Matsuda and K. Ishii, Prog. Theor. Phys. Suppl. **45** (1970), 56.
K. Ishii, Prog. Theor. Phys. Suppl. **53** (1973), 77.

12) M. Goda, Prog. Theor. Phys. **62** (1979), 608.
M. Goda, Int. Conf. ***"Physics in One-Dimension"*** (Fribourg, 1980).
M. Goda, submitted to Prog. Theor. Phys. Suppl.

13) M. Fukushima, 日本物理学会誌**34** (1979), 155.

14) 例えばA.J. Epstein and J.S. Miller, Scientific American **241** (1979), 48.
J.T. Devreese, R.P. Evrard and V.E. Van Doren, *"Highly Conducting One-Dimensional Solids"*, (Plenum, 1976).

15) G. Theodorou and M.H. Cohen, Phys. Rev. **B13** (1976), 4579.

16) D.J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **39** (1977), 1167.
D.J. Thouless, Int. Conf. *"Physics in One-Dimension"* (Fribourg, 1980).
N. Giordano, Int. Conf. *"Physics in One-Dimension"* (Fribourg, 1980).

17) Ph. Choquard, H. Kunz, Ph. Martin and M. Navet, Int. Conf. *"Physics in One-Dimension"* (Fribourg, 1980).

18) H. Haken and G. Strobl, Z. Phys. **262** (1973), 135.
Y. Inaba, (thesis, 1980).

19) K. Ishii, H. Matsuda and N. Ogita, Proc. Int. Symp. *"Mathematical Topics in Biology"* (Kyoto, 1978), Ed. by M. Yamaguti and Ei Teramoto, 24.

20) 例えば CDWに関するもの

21) R. Haydoc, V. Heine and M.J. Kelly, J. Phys. **C5** (1972), 2845.

J. Stein and U. Kray, Z. Phys. **B 34** (1979), 287.

M. Goda, Proc. Int. Conf. *"Lattice Dynamics"* (Paris, 1977), Ed. by M. Balkanski, (Flammarion, 1978), 457.

B.Y. Tong, M.M. Pant and B. Hede, J. Phys. **C 13** (1980), 1221.